Warnhinweis

Bei diesen „Lösungen“ handelt es sich um Lösungsskizzen, Ansätze und Endergebnisse. Die „Lösungen“ können nicht als Muster für Klausur-Lösungen angesehen werden. Außerdem wurden die „Lösungen“ nicht noch einmal auf ihre Richtigkeit kontrolliert und können Fehler enthalten.

Diese „Lösungen“ dienen lediglich zum Abgleich eurer Ergebnisse. Wenn ihr unsicher seid, fragt lieber noch einmal nach.

Mathenacht Analysis I – Grundlagen LÖSUNGEN

① a) Aussage: $\forall k \in \mathbb{Z}\ \exists n \in \mathbb{N} : \frac{k}{n} < 0$

Negation: $\exists k \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathbb{N} : \frac{k}{n} \geq 0$

Die Aussage ist falsch, da es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass der Bruch für $k=3$ negativ wird.

Die Negation ist wahr, ist z.B. $k=1$, so ist $\frac{k}{n}$ immer größer gleich 0 für beliebige $n \in \mathbb{N}$.

b) Aussage: $\exists n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \mathbb{Z} : n \cdot k = -3$

Negation: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{Z} : n \cdot k \neq -3$

Die Aussage ist wahr, es gilt für $1 \in \mathbb{N}$ und $-3 \in \mathbb{Z}$: $1 \cdot (-3) = -3$ gilt.

Die Negation ist falsch, da für $1 \in \mathbb{N}$ und $-3 \in \mathbb{Z}$: $1 \cdot (-3) = -3$ gilt.

② a) Durch vollständige Induktion:

- Induktionsanfang: $3^{2\cdot 1+4} - 2^{1-1} = 728 = 7 \cdot 104$, 728 ist also durch 7 teilbar.
- Induktionsvoraussetzung: Angenommen, $3^{2\cdot n+4} - 2^{n-1}$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Induktionsschritt: Zu zeigen ist, dass der Term dann auch für $n+1$ durch 7 teilbar ist.

$$\Rightarrow 3^{2\cdot(n+1)+4} - 2^{(n+1)-1} = 3^{2n+2+4} - 2^{n} = 3^{2n+4} \cdot 3^2 - 2^n = (\underbrace{3^{2n+4} - 2^{n-1}}_{IV} \underbrace{+ 2^{n-1}}_{\text{produktive } 0}) \cdot 9 - 2^n$$

$$= (\overset{\text{mit } m \in \mathbb{Z}}{7 \cdot m} + 2^{n-1}) \cdot 9 - 2^n = 7 \cdot 9m + 9 \cdot 2^{n-1} \underbrace{- 2^n}_{= -2^{n-1} \cdot 2} = 7m \cdot 9 + 2^{n-1} \cdot 9 + 2^{n-1} \cdot 2$$

$$= 7m \cdot 9 + (9-2) \cdot (2^{n-1}) = 7 \cdot (9m + 2^{n+1})$$

Da $9m + 2^{n-1} \in \mathbb{Z}$ ist, ist der Term somit auch für $n+1$ durch 7 teilbar.

b) Durch vollständige Induktion:

- IA: $n=1$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{k} = \binom{2}{0} + \binom{3}{1} = 1 + 3 = \binom{4}{1} = \binom{1+3}{1}$.
- IV: Angenommen, für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{k} = \binom{n+3}{n}$.
- ISchr.: Zu zeigen ist, dass das dann auch für $n+1$ gilt, also $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+2}{k} = \binom{(n+1)+3}{n+1}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+2}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+2}{k} + \binom{(n+1)+2}{n+1} \overset{IV}{=} \binom{n+3}{n} + \binom{n+3}{n+1} \underset{\text{Binomial-koeffizient}}{=} \frac{(n+3)!}{n! \cdot \underbrace{(\cancel{n}+3-\cancel{n})!}_{=3!=6}} + \frac{(n+3)!}{\underbrace{(n+1)!}_{=(n+1)\cdot n!} \cdot \underbrace{(\cancel{n}+3-(\cancel{n}+1))!}_{=2!=2}}$$

$$= \frac{(n+3)! \cdot (n+1)}{6 \cdot n! \cdot (n+1)} + \frac{(n+3)! \cdot 3}{2 \cdot n! \cdot (n+1) \cdot 3} = \frac{(n+3)! \cdot (n+1)}{6n! \cdot (n+1)} + \frac{3 \cdot (n+3)!}{6n! \cdot (n+1)} = \frac{(n+3)! \cdot (n+1) + 3 \cdot (n+3)!}{6n! \cdot (n+1)}$$

$$= \frac{(n+3)! \cdot (n+1+3)}{6 \cdot (n+1)!} = \frac{(n+3)! \cdot (n+4)}{6 \cdot (n+1)!} = \boxed{\frac{(n+4)!}{6 \cdot (n+1)!}}$$

und:

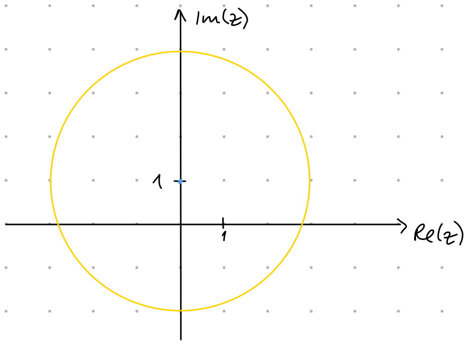
$$\binom{(n+1)+3}{n+1} = \binom{n+4}{n+1} \underset{\text{Binomial-koeffizient}}{=} \frac{(n+4)!}{(n+1)! \cdot (\cancel{n}+4-(\cancel{n}+1))!} = \frac{(n+4)!}{(n+1)! \cdot 3!} = \boxed{\frac{(n+4)!}{(n+1)! \cdot 6}}$$

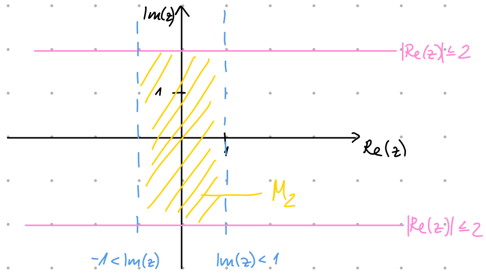
Da die beiden Ergebnisse (orange) gleich sind und nur Äquivalenzumformungen genutzt wurden, müssen auch die jeweiligen Startterme gleich sein, es gilt also $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{k+2}{k} = \binom{(n+1)+3}{n+1}$.

③
- $u + v = 2i - 5 + 7 - 3i = 7 - 5 + 2i - 3i = 2 - i$
- $u \cdot v = (2i - 5) \cdot (7 - 3i) = 14i \underbrace{- 6i^2}_{=+6} - 35 + 15i = -29 + 29i$
- $\frac{u}{v} = \frac{2i-5}{7-3i} = \frac{(2i-5)\cdot(7+3i)}{(7-3i)\cdot(7+3i)} = \frac{14i + \overbrace{6i^2}^{=-6} - 35 - 15i}{7^2 \underbrace{- (3i)^2}_{=+9}} = -\frac{41}{58} - \frac{1}{58}i$

④ a) $M_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z-i| = 3 \}$

b) $M_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 2$





⑤ a) • Reflexivität: $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ gilt: $(x,x) \in R_1 \Rightarrow x + x = 2x$ ✓

• Transitivität: $\forall x,y,z \in M: (x,y),(y,z) \in R_1 \Rightarrow (x,z) \in R_1 \Rightarrow x+y = 2x,\; y+z = 2y$; zu zeigen: $x+z = 2x$

• $x+y = 2x \overset{-x}{\Rightarrow} y = x$

• $y+z = 2y \overset{y=x}{\Rightarrow} x+z = 2x$ ✓

• Symmetrie: $\forall x,y \in \mathbb{Z}: (x,y) \in R_1 \Rightarrow (y,x) \in R_1 \Rightarrow x+y = 2x$; zu zeigen: $y+x = 2y$

• $x+y = 2x \overset{-x}{\Rightarrow} y = x \Rightarrow \overset{y}{\underset{\Downarrow}{x}}+\overset{x}{\underset{\Downarrow}{y}} = 2\overset{y}{\underset{\Downarrow}{x}} \Rightarrow y+x = 2y$ ✓

• Antisymmetrie: $\forall x,y \in \mathbb{Z}: (x,y),(y,x) \in R_1 \Rightarrow x=y \Rightarrow x+y = 2x,\; y+x = 2y$; zu zeigen: $x=y$

• $x+y = 2x \overset{-x}{\Rightarrow} y = x$ ✓

Damit ist R_1 sowohl eine Ordnungs-, als auch eine Äquivalenzrelation.

b) • Reflexivität: $\forall\, x \in \mathbb{Z}$ gilt: $(x,x) \in R_2 \Rightarrow x+x = 2x \in R_2$ ✓

• Transitivität: $\forall x,y,z \in M: (x,y),(y,z) \in R_2 \Rightarrow (x,z) \in R_2$

$\Rightarrow x+y = 2\ell,\; y+z = 2m$; zu zeigen: $x+z$ ist gerade mit $k,\ell,m \in \mathbb{Z}$

Fallunterscheidung:

• $x = 2k$, also x ist gerade

$\Rightarrow \overset{2k}{\overset{\shortparallel}{x}}+y = 2\ell \Rightarrow y = 2\ell - 2k$

$\Rightarrow y+z = 2m \Rightarrow z = 2m - (2\ell - 2k) = 2m - 2\ell + 2k$

$\Rightarrow x+z = 2k + 2m - 2\ell + 2k = 2 \cdot \overbrace{(2k+m-\ell)}^{\in \mathbb{Z}} \in R_2$

• $x = 2k+1$, also x ist ungerade

$\Rightarrow \overset{2k+1}{\overset{\shortparallel}{x}}+y = 2\ell \Rightarrow y = 2\ell - 2k - 1$

$\Rightarrow y+z = 2m \Rightarrow z = 2m - 2\ell + 2k + 1$

$\Rightarrow x+z = 2k+1 + 2m - 2\ell + 2k + 1 = 2 \cdot \overbrace{(2k+m-\ell+1)}^{\in \mathbb{Z}} \in R_2$

Damit gilt die Transitivität ✓

• Symmetrie: $\forall x,y \in \mathbb{Z}: (x,y),(y,x) \in R_2 \Rightarrow x=y \Rightarrow x+y = 2k \overset{\text{komm.}}{\Rightarrow} y+x = 2k \in R_2$ ✓

• Antisymmetrie: $\forall x,y \in \mathbb{Z}: (x,y),(y,x) \in R_1 \Rightarrow x=y \Rightarrow x+y = 2k,\; y+x = 2k$; zu zeigen: $x=y$

z.B. $x=2, y=4 \Rightarrow 4+2 = 6 = 2+4$, aber $2 \neq 4$ ✗

Damit ist R_2 eine Äquivalenzrelation, aber keine Ordnungsrelation.

6 a) Fallunterscheidungen:

1.: $x \geq 0 \Rightarrow |2x| \geq 0 \Rightarrow |3x-9| - 2x = 14$

1.1: $x \geq 3 \Rightarrow |3x-9| \geq 0 \Rightarrow 3x-9-2x = 14$

$3x-9-2x = x-9 = 14 \Rightarrow x = 23$

$23 \geq 3 \Rightarrow x_1 = 23$ ist eine Lösung

1.1: $0 \leq x < 3 \Rightarrow |3x-9| < 0 \Rightarrow -3x+9-2x = 14$

$-3x+9-2x = -5x+9 = 14 \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$

aber: $x_2 = -1$ liegt nicht in $0 \leq x < 3$, also ist die keine Lösung der Gleichung.

2. $x < 0 \Rightarrow |3x-9| < 0,\ |2x| < 0 \Rightarrow -3x+9+2x = 14$

$-3x+9+2x = -x+9 = 14 \Rightarrow x = -5$

$-5 < 0 \Rightarrow x_3 = -5$ ist eine Lösung

Damit sind alle Fälle betrachtet, es gilt $\mathcal{L}_1 = \{23, -5\}$.

b) Fallunterscheidungen:

1.: $x \geq 5 \Rightarrow |x-5| \geq 0,\ |x^2-4x| > 0 \Rightarrow x-5+x^2-4x > 13$

$x-5+x^2-4x = x^2-3x-5 \overset{!}{=} 13 \Rightarrow x^2-3x-18 = 0$

$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}+18} \Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = -3$

$\Rightarrow x_1 > 6,\ x_2 < -3$

$x_1 > 6$ liegt im ausgesuchten Bereich $x_2 < -3$ nicht, also ist nur x_1 eine Lösung.

2.: $x < 5 \Rightarrow |x-5| < 0 \Rightarrow -x+5+|x^2-4x| < 13$

2.1: $4 \leq x < 5 \Rightarrow |x^2-4x| \geq 0 \Rightarrow -x+5+x^2-4x > 13$

$-x+5+x^2-4x = x^2-5x+5 \overset{!}{=} 13 \Rightarrow x^2-5x-8 = 0$

$\Rightarrow x_{3/4} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}+8} \Rightarrow x_3 \approx 6{,}27,\ x_4 \approx 1{,}27$

$\Rightarrow x_3 > 6{,}27,\ x_4 < 1{,}27$

Weder $x_3 > 6{,}27$ noch $x_4 < 1{,}27$ liegen im ausgesuchten Bereich und sind somit keine Lösungen.

2.2: $x < 4 \Rightarrow |x^2-4x| < 0 \Rightarrow -x+5-x^2+4x < 13$

$-x+5-x^2+4x = -x^2+3x+5 \overset{!}{=} 13 \Rightarrow x^2-3x+8 = 0$

$\Rightarrow x_{5/6} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{2}-8}$ => keine reellen Lösungen

Damit sind alle Fälle betrachtet, es gilt $\mathcal{L}_2 = (6, \infty)$.

7 a) $M_1 = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n+2}$ mit $n, m \in \mathbb{N}\}$

- Für $n = 1$ gilt: $x = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$

  Wird n größer, wird x kleiner. n kann nicht kleiner als 1 werden.

  Also ist $\frac{1}{3}$ das Supremum der Menge M_1. Da $\frac{1}{3} \in M_1$ ist, ist es außerdem das Maximum.

- Für $n \to \infty$ gilt: $x = \frac{1}{n+2} \to 0$.

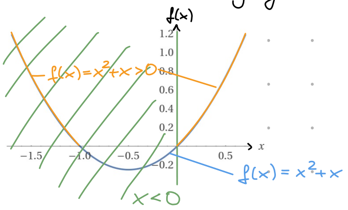
  Da n immer positiv ist, ist auch $x = \frac{1}{n+2}$ immer positiv.

  Damit ist 0 das Infimum der Menge M_2. Allerdings gilt $0 \notin M_2$, also ist 0 nicht das Minimum.

⑦ b) $M_2 = \{x \in \mathbb{R} : \boxed{x^2 + x + 3 > 3}, x < 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \boxed{x^2 + x > 0}, x < 0\}$

-3

Betrachten wir die Bedingungen von M_2 als Funktionen:



Wir müssen nun gucken, wo die Mengen $A_1 = \{x < 0\}$ und $A_2 = \{x^2 + x > 0\}$ sich überschneiden. Dies ist nur die linke orange Linie.

Die Punkte dieser Linie sind dementsprechend die Elemente von M_2.

Wir sehen, dass M_2 durch $x^2 + x > 0$ und somit auch durch $x^2 + x + 3 > 3$ durch 0 nach unten beschränkt ist. 0 ist also das Infimum von M_2. Es gilt aber $0 \notin M_2$, 0 ist also kein Minimum.

Wir sehen außerdem, dass M_2 nicht nach oben beschränkt ist, M_2 besitzt also kein Supremum oder Maximum.

Folgen

1. Aufgabe:

Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}$.

Behauptung: Die Folge (a_n) ist monoton wachsend, beschränkt und hat den Grenzwert $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Beweis: Wir beweisen die Monotonie mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Es ist $0 \leq a_1 = 0 \leq \frac{1}{2} = a_2$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $0 \leq an \leq a_{n+1}$ gilt.

Induktionsschritt: Angenommen $a_{n+2} < 0$. Dann ist $1 < \frac{1}{2+a_{n+1}}$. Das ist äquivalent zu: $a_{n+1} < -1$ und das ist ein Widerspruch zu $0 \leq an \leq a_{n+1}$. Somit ist $a_{n+2} \geq 0$.
Es gilt: $2 \leq 2 + a_n \leq 2 + a_{n+1}$. Damit gilt auch: $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{2+a_n} \geq \frac{1}{2+a_{n+1}}$. Nun ist $a_{n+2} = 1 - \frac{1}{2+a_{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{2+a_n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \geq 0$.

Es folgt: $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n} < 1$, ist die Folge (a_n) nach oben durch die 1 beschränkt und durch die 0 nach unten beschränkt, wie bereits oben gezeigt.

Mit der Vorlesung wissen wir nun, dass (a_n) konvergiert, da (a_n) beschränkt und monoton ist. Sei dazu der Grenzwert $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Es gilt demnach $a = 1 - \frac{1}{2+a}$, das ist äquivalent zu $a(2+a) - (2+a) + 1 = 0$ und mittels Nullstellenberechnung für $a^2 + a - 1 = 0$ erhält man $a_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$. Da $a > 0$ gilt, folgt $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. Aufgabe:

a) Es ist $a_n = \sqrt{3n+6} - \sqrt{3n+1} = \frac{(3n+6)-(3n+1)}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}} = \frac{5}{\sqrt{3n+6}+\sqrt{3n+1}}$ und damit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Angenommen b_{2n} konvergiert gegen einen Grenzwert d. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{2n}}{2n} \to 0$ und das ist ein Widerspruch dazu, dass $sin(2n)$ nicht gegen 0 geht für $n \to \infty$.

c) Es ist $c_n = \frac{n^2+\sqrt{5^n}}{3^n+1} = \frac{\frac{n^2}{3^n}+\sqrt{(\frac{5}{9})^n}}{1+\frac{1}{3^n}}$ und das geht für $n \to \infty$ gegen 0.

d) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3+1}{n^3-n+6} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6+\frac{1}{n^3}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{6}{n^3}} = 6$.

e) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

3. Aufgabe:

Bestimme alle Häufungspunkte der nachfolgenden Zahlenfolgen:

a) Für $n = 2k$ betrachte $a_{2k} := \frac{1+(-7)^{2k}}{7^{2k}} = \frac{\frac{1}{7^{2k}}+1}{1} \to 1, n \to \infty$.
Für $n = 2k+1$ betrachte $a_{2k+1} := \frac{1+(-7)^{2k+1}}{7^{2k+1}} = \frac{\frac{1}{7^{2k}}-7}{7} \to -1, n \to \infty$.

b) Es ist $b_{2k} = \frac{(2k)^6+3(2k)-2}{6^{2k}+5} = \frac{(2k)^6+6k}{6^{2k}+5} - \frac{2}{6^{2k}+5}$. Der hintere Part geht für $n \to \infty$ gegen 0. Klammert man im vorderen Term noch $(2k)^6$ aus im Nenner und im Zähler, so erhält man $\frac{1+\frac{6k}{(2k)^6}}{\frac{6^{2k}}{(2k)^6}+\frac{5}{(2k)^6}}$. Das geht für $k \to \infty$ gegen $\frac{(2k)^6}{6^{2k}}$ und dieser Termin geht für $k \to \infty$ gegen 0. Ist $n = 2k+1$, so erhält man analog den Grenzwert 0.

c) Man kann sich für alle natürlichen Zahlen m eine Teilfolge konstruieren, indem man alle $n \neq m$ aus der Folge c_n streicht und die Folge $(m, m, m, ...)$ erhält, indem man die Folgenglieder neu sortiert, sodass alle natürlichen Zahlen Häufungspunkte der Folge c_n sind.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = (\frac{n-1}{n})^{6n} = e^{-6}$. (Nach Vorlesung)

e) $e_n := \frac{3^n}{n!}$ konvergiert gegen 0 mit Aufgabe 2e, sodass nach VL 0 der einzige Häufungspunkt ist.

f) $f_n := i^n + (-1)^n$ hat (mittels Wahl von $n = 4n, 4n+1, 4n+2, 4n+2$) die Häufungspunkte $-1+i, 0, -1-i$ und 2.

4. Aufgabe:

Zeige, dass die durch $a_1 := 1$ und $a_{n+1} := a_n^2 + a_n$ definierte Folge keine Cauchy-Folge ist.

Beweis: Wir zeigen zuerst per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $0 < a_n$ gilt. Induktionsanfang: Es ist $a_1 = 1 > 0$.

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $0 < an$ gilt.

Induktionsschritt: Es ist $a_n^2 > 0$, da $a_n > 0$, also ist $a_{n+1} = a_n^2 + a_n > 0$.

Insgesamt folgt die Behauptung. Damit ist $a_{n+1} = a_n^2 + a_n = a_n(1 + a_n) > a_n$ und somit gilt $|a_{n+1} - a_n| = |a_n^2 + a_n - a_n| = |a_n^2| \geq a_1^2 = 1$. Damit handelt es sich um keine Cauchy-Folge, also ist die Folge nach Vorlesung auch nicht konvergent.

5. Aufgabe: (*nur für Bachelor*)

Beweise die folgenden Aussagen.

- ☐ (a_n) konvergiert genau dann gegen a, wenn $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert.

  Beweis: Es gelte $(a_n) \to a, n \to \infty$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ für alle $\epsilon > 0$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt: $\|a_n - a\| \leq \epsilon$. Das ist äquivalent zu $\|a_n - a - 0\| \leq \epsilon$ und das ist gleichbedeutend zu $(a_n - a) \to 0$, $n \to \infty$.

- ☐ Es gelte $(a_n) \to a$ und $b_n - a_n \to 0$, $n \to \infty$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Aus den Voraussetzungen gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt: $\|a_n - a\| \leq \frac{\epsilon}{2}, \|b_n - a_n\| \leq \frac{\epsilon}{2}$. Damit folgt: $\|b_n - a\| = \|b_n - a_n + a_n - a\| \leq \|b_n - a_n\| + \|a_n - a\| \leq \epsilon$. Also folgt $b_n \to a, n \to \infty$.

6. Aufgabe:

Welche Aussage ist richtig? Finde für falsche Aussagen ein Gegenbeispiel und beweise richtige Aussagen.

- ✓ Seien $(a_n), (b_n)$ beschränkte Zahlenfolgen. Dann existieren $M, N > 0$ so, dass $|a_n| \leq M$ und $|b_n| \leq N$ gilt. Dann ist $|a_n||b_n| = |a_n b_n| \leq NM$.
- x $(-1)^n$
- x Definiere $a_n := \frac{2+(-1)^n}{n}$, dann ist $a_1 = 1, a_2 = \frac{3}{2}, a_3 = \frac{1}{3}$, das heißt a_n ist nicht monoton, aber konvergent.
- x Es konvergiert $(-1)^n \frac{1}{n}$ gegen 0 für $n \to \infty$, ist aber keine monotone Folge.
- x $(-1)^n$ mit 1 und -1
- ✓ Äquivalent zur Definition
- x Sei $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\frac{1}{n}n$ gegen 1.

Lösungen - Reihen

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

a) Die Höhe des Turmes wird beschrieben durch die harmonische Reihe $H = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Eine Abschätzung, die die Divergenz zeigt, sieht so aus:

$$H = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ...$$

$$H \geq 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + ...$$

$$H \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

Da die Reihe divergiert, gibt es keine obere Schranke für die Höhe des Turms und damit kann kein Kran ihn errichten.

a) Die Fläche der Vorderseite wird durch die Reihe: $F = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ beschrieben. Diese Reihe konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,64$ und man kann die Fläche also mit einer relativ kleinen Menge Farbe rot färben.

2. Aufgabe: (*Konvergenzkriterien*)

a) Die Konvergenz dieser Reihe kann mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen werden:
$\lim_{k\to\infty} |\frac{2^{k+1}}{(k+1)^3} \cdot \frac{k^3}{2^k}| = \lim_{k\to\infty} 2 \cdot (\frac{k}{k+1})^3 = 2 > 1$. Damit divergiert die Reihe.

b) Da $\sqrt[n]{n} \to 1$, für $n \to \infty$ konvergiert, ist das notwendige Konvergenzkriterium nicht erfüllt und die Reihe divergiert.

c) Es ist $C := \sum_{k=0}^{\infty}((-1)^{k+1} + 1)2^{-k}$
$= 0 + 2 \cdot 2^{-1} + 0 + 2 \cdot 2^{-3} + 0 + 2 \cdot 2^{-5} + 0 + ...$
$= 2^0 + 2^{-2} + 2^{-4} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(2^{-2})^k = \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{4})^k$.
Dies entspricht einer konvergierenden, geometrischen Reihe mit $C = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

d) Die Konvergenz dieser Reihe kann mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen werden:

$$\lim_{k\to\infty} |\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^k \cdot (k+1)!}{k! \cdot (k+1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(\frac{k+1}{k})^k} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} (1+\frac{1}{k})^k} = \frac{1}{e} < 1.$$

e) Für diese Reihe (E :=Reihe) nutzen wir eine Fallunterscheidung:

1. Fall: n ist gerade: $E = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5n+2}{6n+2})^n$

Anwendung des Wurzelkriteriums liefert: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{5n+2}{6n+2})^n} = \limsup\limits_{n\to\infty} (\frac{5n+2}{6n+2}) = \frac{5}{6} < 1.$

2. Fall: n ist ungerade: $E = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{5n+2}{6n+2})^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{6n+2}{5n+2})^n.$

Analoge liefert das Wurzelkriterium: $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{6n+2}{5n+2})^n} = \limsup\limits_{n\to\infty} (\frac{6n+2}{5n+2}) = \frac{6}{5} > 1.$

Da die beiden Häufungspunkte verschieden sind, divergiert die Reihe.

f) Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+1}{n^2}$ konvergiert und eine Majorante ($|cos(n)| \leq 1$) ist, konvergiert auch die Reihe F aus der Aufgabe.

g) Mit dem Quotientenkriterium kann die Divergenz der Reihe gezeigt werden:

$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{3+a_n}{1+a_n} > 1.$

h) Nach dem Wurzelkriterium ist $\sqrt[n]{|(\frac{n}{n+1})^{n^2}|} = (\frac{n}{n+1})^n = (\frac{1}{\frac{n+1}{n}})^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}$

3. Aufgabe: (*Reihenwerte*)

Der Reihenwert von c) $C = \frac{4}{3}$ wurde schon in Aufgabe 2 gezeigt.

Die zweite Reihe kann mit Partialbruchzerlegung umgewandelt werden:

$$\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1+k-k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(2+2k-2k}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+1-2k+1)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)} =$$
$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{2k+1}{(2k-1)(2k+1)} - \frac{2k-1}{(2k-1)(2k+1)}) = \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}).$$

Damit kann man also die Reihe als Teleskopsumme auflösen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2k+1}) =$$
$$\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

4. Aufgabe:

a) Es ist

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = |\frac{\frac{1}{2^{k+1}}(x+1)^{k+1}}{\frac{1}{2^k}(x+1)^k}| = |\frac{1}{2}(x+1)| = \frac{1}{2}|x+1|$$

Das heißt für $|x+1| < 2$, also für $x \in (-3, 1)$ ist die Reihe konvergent und für $x < -3$ und $x > 1$ ist die Reihe divergent.
Für $x = 1$ wird die Reihe zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$$

diese konvergiert offensichtlich nicht.
Für $x = -3$ wird die Reihe zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}(-2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$$

welche auch offensichtlich nicht konvergiert.

b) Es ist

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = |\frac{\frac{1}{2^{k+1}}(x)^2 k + 1}{\frac{1}{2^k}(x)^2 k}| = |\frac{1}{2}(x^2)| = \frac{1}{2}|x^2|$$

Das heißt für $|x^2| < 2$, also für $x \in (-\sqrt{2}, sqrt2)$ ist die Reihe konvergent und für $x < -\sqrt{2}$ und $x > \sqrt{2}$ ist die Reihe divergent.
Für $x = \pm\sqrt{2}$ wird die Reihe zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} 2^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$$

welche offensichtlich nicht konvergiert.

5. Aufgabe: (*Cauchy-Produkt/Faltungsreihe*)

a) Da $\frac{1}{\sqrt{n}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium. Für $n \geq 1$ ist aber $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n}$ und damit konvergiert die Reihe nicht absolut (Minoranten-Kriterium).

b) Es gilt

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

Da

$$|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}| = |(-1)^n|| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1$$

ist die Reihe über c_n divergent, denn die Koeffizienten bilden keine Nullfolge.

Lösungen - Funk.

1. Aufgabe: (*Einstieg*)

Lösungen findet man bei den Aufgaben.

2. Aufgabe: (*Injektivität und Surjektivität*)

a) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ beliebig.
Dann ist $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Das heißt $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Dann ist aber nach Definition von $(g \circ f)$ auch schon $x_1 = x_2$ und f injektiv.
Nun sei $x \in X$ beliebig.
Wähle $y = f(x)$, dann ist $g(y) = g(f(x)) = x$ und damit y ein Urbild von x unter g und g somit surjektiv.

b) Sei $X = \mathbb{R}_+$ und $Y = \mathbb{R}$. $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$.
Dann ist $g(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, aber f ist nicht surjektiv und g ist nicht injektiv.

3. Aufgabe: (*Stetigkeit*)

a) Für $x \neq 0$ ist die Funktion stetig, da sie eine Verknüpfung von stetigen Funktionen ist.
Für $x_0 = 0$ müssen wir überprüfen, dass $\lim_{x \to 0_+} h_a(x) = \lim_{x \to 0_-} h_a(x) = b$.

$$\lim_{x \to 0_-} h_a(x) = \lim_{x \to 0_-} \frac{|x| + 2}{|x| + a} = \lim_{x \to 0_-} \frac{-x + 2}{-x + a} = \frac{2}{a}$$

$$\lim_{x \to 0_+} h_a(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{|x| + 2}{|x| + a} = \lim_{x \to 0_+} \frac{x + 2}{x + a} = \frac{2}{a}$$

Definiert man also $b := \frac{2}{a}$, so ist h_a auch in $x_0 = 0$ stetig und damit auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Zusatz: Setzt man $a = 0$ und überprüft den rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ mit der Nullfolge $x_n = \frac{1}{n}$, so erhält man:

$$\lim_{x \to 0_+} h_0(x) = \lim_{n \to \infty} h_0(x_n) = \lim_{n \to \infty} 1 + \frac{2}{\frac{1}{n}} = 1 + \lim_{n \to \infty} 2n$$

Da dieser Grenzwert nicht existiert, kann auch die Funktion nicht stetig sein, egal wie man b wählt.

4. Aufgabe:

a) Definieren wir $f(x) := sin(2x) - \frac{1}{x+3}$, so erhalten wir, dass die Funktion an den Rändern des Intervalls $(0,1)$ verschiedene Vorzeichen hat, denn:

$$f(0) = sin(0) - \frac{1}{3} < 0$$

$$f(1) = sin(1) - \frac{1}{4} > 0$$

Mit dem Nullstellensatz folgt also, dass f im Intervall $(0,1)$ eine Nullstelle $f(x_0) = 0$ besitzt und damit ist $0 = sin(x_0) - \frac{1}{x_0+3}$ und $sin(x_0) = \frac{1}{x_0+3}$.

b) Wir betrachten die Funktion $f(x) = e^{\sqrt{x}} - sin(x) - 2$ auf dem Intervall $[1,2]$.
Es ist $f(1) = e - sin(1) - 2 \approx -0,12 < 0$ und $f(2) = e^{\sqrt{2}} - sin(2) - 2 \approx 1,2 > 0$. Damit existiert nach dem Nullstellensatz ein $x_0 \in [1,2]$ mit $f(x_0) = 0$ und damit $e^{\sqrt{x_0}} = sin(x_0) + 2$.

c) Es ist $g(x) \leq 1$ und gleichzeitig $f(x) = e^{\sqrt{0}} = 1$ aber $f(x)$ streng monoton wachsend. Daraus ergibt sich, dass es keinen Schnittpunkt der beiden Funktionen für $x > 0$ geben kann.

5. Aufgabe: (*Nur für Bachelor*)

a) Es gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{h^2 \cdot f(h) - 0^2 \cdot f(0)}{h} = h \cdot f(h) \to 0, \quad h \to 0.$$

Die Konvergenz gilt nur, weil $|f(h)| \leq M$ für ein $M > 0$ und daher

$$|h \cdot f(h)| \leq M \cdot |h| \to 0, \quad h \to 0.$$

b) Wir definieren uns die Funktion $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}.$$

Die Funktion ist nach den Permanenzeigenschaften der Vorlesung differenzierbar für $x > -1$ mit

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x) - x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Für $x > 0$ ist die Ableitung auch größer Null. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes $x > 0$ ein $y \in (0,x)$ mit

$$0 < f'(y) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

Da $x > 0$ muss auch $f(x) > 0$ gelten, also die Behauptung.

Topologie

1. Aufgabe:

a)

$$\mathring{A} = \{x \in A : B_r(x) \subset A \text{ für ein } r > 0\}$$

$$\partial A = \{x \in A : \forall r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

b) z.B. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $\mathbb{R} \supset A = \{1\}$

c)

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$$

Weil $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht ist. Für jeden offenen Ball um eine rationale Zahl liegt eine irrationale Zahl auch in dem Ball. Es gibt also keine inneren Punkte. Und weil jede irrationale Zahl beliebig genau durch eine rationale approximiert werden kann

$$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

d) Die rationalen Zahlen sind in den reellen Zahlen nicht offen, da es keine inneren Punkte gibt. Ebenso wenig sind die rationalen Zahlen in den reellen abgeschlossen.

2. Aufgabe:

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) $A \subset X$ heißt folgenkompakt, falls für jede Folge $(x_n) \subset A$ eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) existiert mit $x_{n_k} \to x \in A$.

b) $\mathbb{R}$ ist nicht folgenkompakt. Die Folge $x_n = n$ hat keine konvergente Teilfolge.

c) Sei A folgenkompakt und $(y_n) \subset f(A)$. Dann gibt es für jedes n ein $x_n \in A$ mit $y_n = f(x_n)$.

Da die Folge $(x_n) \subset A$ und A folgenkompakt ist, gibt es eine Teilfolge, sodass x_{n_k} gegen ein $x \in A$ konvergiert. Weil f stetig ist, konvergiert also auch $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ gegen $f(x) \in A$.

3. Aufgabe:

a) Eine Abbildung $f : (X, d_x) \to (Y, d_y)$ zwischen zwei metrischen Räumen heißt Kontraktion, wenn es eine reelle Zahl $\kappa < 1$ gibt mit der Eigenschaft

$$d_Y(f(x), f(\tilde{x})) \leq \kappa d_x(x, \tilde{x}) \quad x, \tilde{x} \in X$$

a) Eine kontraktive Selbstabbildung f eines metrischen Raumes (X, d) in sich besitzt einen eindeutig bestimmten Punkt $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft

$$f(x_0) = x_0$$

a) Es muss geprüft werden, ob das Bild von f in [0,1] liegt. Das abgeschlossene Intervall [0,1] mit der Betragsmetrik ist ein metrischer Raum.

Es ist $f(0) = \frac{1}{3} > 0$ und $f(1) \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \log\left(1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) < 1$. Außerdem ist die Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \arctan^2(x)} \cdot 2 \cdot \arctan(x) \cdot \frac{1}{1 + x^2}$$

in [0,1] stets positiv. Also ist $f([0,1]) \subset [0,1]$. f ist also eine Selbstabbildung.

Der Mittelwertsatz besagt für $x < y, \quad x, y \in [0,1]$

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(\xi)| \quad \xi \in (a, b)$$

Die Ableitung kann aber abgeschätz werden mit

$$f'(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \arctan^2(x)} \cdot 2 \cdot \arctan(x) \leq \frac{1}{4} \frac{1}{1 + 0^2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 + 0^2} = \frac{\pi}{4} < 1$$

Also ist f eine Kontraktion und der Fixpunktsatz liefert die eindeutige Existenz des Fixpunktes.

Topologie, Taylor, Integrale (Bachelor only)

1. Aufgabe: (*Taylor*)

a) Die Funktion ist in $D(f)$ 3-mal differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} \qquad f''(x) = \frac{-1}{\cos(x)^2}$$

Dann gilt nach der Taylorschen Formel

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + R_2(x,0) \\ &= \log(\cos(0)) + \frac{-\sin(0)}{\cos(0)} \cdot x + \frac{-1}{2\cos(0)^2} \cdot x^2 + R_2(x,0) \\ &= -x^2 + R_2(x,0) \end{aligned}$$

Also ist $p(x) = -x^2$.

b) Nach dem Satz von Taylor ist für $f(x) = \sin(x)$ und $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x-0) + R_1(x,0).$$

Mit $f'(x) = \cos(x)$ ergibt sich

$$\sin(x) = 0 + 1 \cdot x + R_1(x,0) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) - x = R_1(x,0).$$

Für das Restglied in $x \in (0,1)$ wissen wir laut der Formel von Taylor, dass es ein $\xi \in (0,x)$ gibt mit

$$R_1(x,0) = \frac{f''(x)}{2!}x^2 = \frac{-\sin(x)}{2} \cdot x^2$$

In $(0,1)$ ist die Sinus-Funktion positiv, also gilt

$$\sin(x) - x = R_1(x) < 0$$

und damit die Behauptung.

2. Aufgabe: (*L'Hospital*)

a) Ja. Wir können umformen zu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot e^x - x}$$

Da sowohl der Zähler als auch Nenner gegen Null konvergieren, wenn $x \to 0$, können wir die Regel von l'Hospital anwenden und erhalten

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x \cdot e^x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1}$$

Da immer noch sowohl der Zähler, als auch Nenner gegen Null konvergieren, wenden wir die Regel noch einmal an und erhalten

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^x + xe^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \frac{1}{1 + 1 + 0} = \frac{1}{2}$$

b) Ja, denn nach der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Wenn man $a = 1$ setzt, ist die Funktion f in $x = 0$ stetig laut der Folgendefinition. Für alle anderen x ist die Funktion als Komposition von stetigen Funktion stetig.

3. Aufgabe: (*Riemann-Integrale*)

a) Eine Zerlegung Z von $[a, b]$ ist eine Teilmenge

$$Z = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$$

mit $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b$. Eine Ober- und Untersumme zu Z ist dann

$$O(Z, f) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \cdot \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$U(Z, f) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \cdot \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Wenn $\inf_{Z_1} O(Z_1, f) = \sup_{Z_2} U(Z_2, f)$ gilt, dann heißt f Riemann-integrierbar.

b) In dieser Zerlegung sind alle Intervalle gleich lang, d.h. $|x_{i+1} - x_i| = \frac{1}{n}$. Da f eine monoton steigende Funktion ist, ist das Supremum in einem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ der Funktionswerte $f(x_i)$ und das Infimum $f(x_{i-1})$. Damit folgt als Teleskopsumme

$$O(Z, f) - U(Z, f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_{i-1}) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{n} = \frac{f(b) - f(a)}{n}$$

Da $n \in \mathbb{N}$ beliebig groß gewählt werden kann, wird die Differenz beliebig klein. Laut Vorlesung (16.3.) ist f Riemann-integrierbar.